

## **Antrag**

**Bearbeitung:** Jens-Uwe Schulz (E-Mail: [jens-uwe.schulz@luebeck.de](mailto:jens-uwe.schulz@luebeck.de) Telefon: 122-1067/1068)

### **grün+alternativ+links (GAL): Änderungsantrag zu VO/2018/05901 »CDU - Erbbaurechte: Verwaltung erarbeitet eine rechtssichere Vor- lage«**

#### **Beratungsfolge:**

<b>Datum</b>	<b>Gremium</b>	<b>Status</b>	<b>Zuständigkeit</b>
22.03.2018	Bürgerschaft der Hansestadt Lübeck	Öffentlich	zur Entscheidung

#### **Antrag:**

Der Bürgermeister wird aufgefordert,

1. den im Anhang vorgelegten mathematischen Beweis »Zu Erbbaurechten mit wertgesichertem nachschüssigen Erbbauzins« prüfen zu lassen. Bei positivem Ausgang der Prüfung möge der Bürgermeister eine rechtssichere Vorlage für neue Erbbauverträge erarbeiten, die auf diesem Beweis aufbaut;
2. eine rechtssichere Vorlage zu erarbeiten, auf Grund derer Erbbauberechtigte das von ihnen bewohnte Erbbaugrundstück zum aktuellen Bodenrichtwert kaufen können. Diese Vorlage soll auch für die Erbbauberechtigten gelten, deren Erbbauvertrag nach 2045 ausläuft. Der noch geltende Zuschlag von 10 Prozent soll gestrichen werden;
3. eine rechtssichere Vorlage zu erarbeiten, damit Lübeck für jedes ab Mai 2018 verkaufte Erbbaugrundstück innerhalb von zwei Jahren ein bezüglich Preis, Größe und Lage zeitgemäßes Erbbaugrundstück neu anbietet.

#### **Begründung:**

1. Ein mathematischer Beweis ist richtig oder falsch. Eine dritte Möglichkeit existiert nicht. Er mag allerdings zur falschen Zeit entstehen oder unerwünscht sein.

In Lübeck laufen in den nächsten 40 Jahren über 2000 Erbbauverträge aus. Die vom Bürgermeister angebotenen "Verlängerungsverträge" werden von den jetzigen Erbbaunehmerinnen nur sehr zögernd akzeptiert. Die vom Bürgermeister angebotenen Erbbauverträge für neue Grundstücke werden von bauwilligen Familien nicht angenommen. Mit einem starren Erbbauzinssatz von 4% sind sie zur Zeit zu teuer.

Lübeck braucht einen Erbbauzins, der in der jeweiligen Zinslandschaft angemessen ist und langfristig, über 99 Jahre, bei veränderten Zinsbedingungen innerhalb des gesetzlich gegebenen Rahmens angepasst werden kann. Der vorgelegte mathematischer Ansatz schafft - wenn er denn richtig ist - die Möglichkeit, einen solchen Erbbauzins anzubieten.

Der Ansatz kommt weder zur falschen Zeit, noch kann er bei allen, die Erbbau in Lübeck erhalten wollen, unerwünscht sein.

2. Erbbaugrundstücke, die vor 2045 auslaufen, werden seit Juni 2017 ohne einen 10%igen Zuschlag auf den Bodenrichtwert an die Erbbaunehmerinnen verkauft (VO/2017/04887). Der Zeitpunkt 2045 erscheint willkürlich. Aus Gleichheitsgründen ist es angebracht, auf diesen Zuschlag auch bei Erbbauverträgen, die nach 2045 auslaufen, zu verzichten.
3. Ein Grundstück zu kaufen und ein Haus zu bauen ist für junge Menschen ein finanzieller Kraftakt. Ein Erbbaugrundstück macht ihnen diesen Kraftakt ein wenig einfacher.

**Anlagen :**

Vorsitzende/r  
der GAL - Fraktion

# Zu Erbbaurechten mit wertgesichertem nachschüssigen Erbbauzins

Dipl.-Math. Tore Koß

tore-koss@mail.de

Wir werden auf den folgenden Seiten die Erträge einer Gemeinde, die sie mit der Vergabe von Erbbaurechten mit wertgesichertem nachschüssigen Erbbauzins für ein Grundstück erzielen kann, mit den Erträgen, die sie durch den Verkauf des Grundstückes erzielen kann, vergleichen. Dazu wollen wir zunächst die beiden Varianten genauer beschreiben und hernach zwei Formeln für die jeweiligen Erträge aufstellen.

In beiden Modellen starten wir am ersten Tag des Jahres 1. Im Falle des Verkaufs legt die Gemeinde an diesem Tag den Verkaufserlös zu einem Kapitalmarktzins  $z_{\text{Kap}}$  an. Am letzten Tag eines Jahres erhält die Gemeinde Zinsen auf ihr angelegtes Geld und legt es an jedem 1. eines Jahres zum selben Zinssatz wieder an.

Im Falle des Erbbaurechtes beginnt der Erbbauvertrag am ersten Tag des Jahres 1, die Gemeinde erhält am letzten Tag des Jahres 1 den ersten nachschüssigen Erbbauzins und legt diesen Zins am ersten Tag des Jahres 2 zu dem Zinssatz  $z_{\text{Kap}}$  an. Am letzten Tag des Jahres 2 erhält die Gemeinde den nächsten Erbbauzins und legt diesen (gemeinsam mit den Zinsen auf den ersten Erbbauzins) auch zu dem Zinssatz  $z_{\text{Kap}}$  am ersten Tag des Jahres 3 an usw. Der jährliche Erbbauzins richtet sich dabei nach einem vorher festgelegten, konstanten Erbbauzinssatz  $z_{\text{Erb}}$  und dem Wert des Grundstückes am ersten Tag des jeweiligen Jahres.

Nach dem Ablauf der im Erbbauvertrag festgelegten Dauer vergleichen wir die bis dahin angesammelten Erträge. Dazu ist zu bemerken, dass sich die Rechnungen bei verschiedenen Laufzeiten nicht prinzipiell unterscheiden, daher werden wir mit einer allgemeinen Laufzeit von  $n$  Jahren rechnen und den bisher angesammelten Betrag am ersten Tag von Jahr  $n + 1$  vergleichen. Ebenso sind wir nicht daran gebunden diese beiden Modelle überhaupt in „Jahren“ zu betrachten, wir können stattdessen genauso gut in Monaten, Quartalen, Dekaden oder sonstigen Zeiteinheiten rechnen<sup>1</sup>, wir werden aber bei „Jahren“ bleiben.

Betrachten wir zunächst den Verkauf eines Grundstückes: Die Gemeinde erhält bei dem Verkauf den Wert  $W_1$  des Grundstückes in Jahr 1 und kann dieses Vermögen  $n$  Jahre

---

<sup>1</sup>Wir sollten natürlich darauf achten, dass wir dann auch Monats-, Quartals- oder Dekadenzinssätze nehmen.

zu dem erwarteten Kapitalmarktzins  $z_{\text{Kap}}$  anlegen. Der Ertrag  $E_{\text{Kauf}}$  nach dem Ende der Laufzeit entspricht somit

$$E_{\text{Kauf}} = W_1 \cdot (1 + z_{\text{Kap}})^n. \quad (1)$$

Die Bestimmung des Ertrags  $E_{\text{Erb}}$  durch den Erbbauzins ist ein wenig umständlicher. Betrachten wir zunächst den im Jahr  $i$  zu zahlenden Erbbauzins  $R_i$ . Dieser ist das Produkt aus dem Erbbauzinssatz  $z_{\text{Erb}}$  und dem Wert des Grundstücks  $W_i$  im Jahr  $i$ . Den Wert  $W_i$  des Grundstückes im Jahr  $i$  berechnen wir aus der Inflationsrate  $z_{\text{Inf}}$  und dem Wert  $W_1$  des Grundstückes in Jahr 1. Dazu multiplizieren wir jedes Jahr  $W_1$  mit  $1 + z_{\text{Inf}}$ . Zu beachten haben wir dabei, dass von Jahr 1 bis Jahr  $i$  nur  $i - 1$  Jahre vergehen:

$$W_i = W_1 \cdot (1 + z_{\text{Inf}})^{i-1}. \quad (2)$$

Für den Erbbauzins erhalten wir so folgende Formel:

$$R_i = W_i \cdot z_{\text{Erb}} = W_1 \cdot (1 + z_{\text{Inf}})^{i-1} \cdot z_{\text{Erb}}. \quad (3)$$

Da die Gemeinde den Erbbauzins  $R_i$  im Jahr  $i$  erhält, kann sie ihn für die restlichen  $n - i$  Jahre des Erbbauvertrages zum Kapitalmarktzins  $z_{\text{Kap}}$  anlegen. Der gesamte Ertrag des Erbbauzinses  $E_{\text{Erb}}$  über die Laufzeit des Erbbauvertrages ergibt sich also, indem wir  $R_i$  mit  $(1 + z_{\text{Kap}})^{n-i}$  multiplizieren und anschließend alle diese Produkte aufsummieren:

$$E_{\text{Erb}} = \sum_{i=1}^n R_i \cdot (1 + z_{\text{Kap}})^{n-i} = \sum_{i=1}^n W_1 \cdot (1 + z_{\text{Inf}})^{i-1} \cdot z_{\text{Erb}} \cdot (1 + z_{\text{Kap}})^{n-i}. \quad (4)$$

Wir werden nun die Faktoren ohne  $i$  sammeln und aus der Summe herausziehen:

$$E_{\text{Erb}} = \sum_{i=1}^n W_1 \cdot (1 + z_{\text{Inf}})^{-1} \cdot z_{\text{Erb}} \cdot (1 + z_{\text{Kap}})^n \cdot \left( \frac{1 + z_{\text{Inf}}}{1 + z_{\text{Kap}}} \right)^i \quad (5)$$

$$= W_1 \cdot (1 + z_{\text{Inf}})^{-1} \cdot z_{\text{Erb}} \cdot (1 + z_{\text{Kap}})^n \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{1 + z_{\text{Inf}}}{1 + z_{\text{Kap}}} \right)^i. \quad (6)$$

Um diese Formel noch weiter zu vereinfachen benötigen wir den Wert von Summen der Form  $\sum_{i=1}^n q^i$ : Ist  $q = 1$ , dann ist auch  $q^i = 1$  und somit  $\sum_{i=1}^n q^i = 1 + 1 + \dots + 1 = n$ . In allen anderen Fällen ist  $1 - q \neq 0$  und wir dürfen mit  $1 - q$  multiplizieren (da wir jederzeit wieder durch  $1 - q$  teilen können). So erhalten wir

$$(1 - q) \cdot \sum_{i=1}^n q^i = 1 \cdot \sum_{i=1}^n q^i - q \cdot \sum_{i=1}^n q^i = \sum_{i=1}^n q^i - \sum_{i=2}^{n+1} q^i = q - q^{n+1} \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n q^i = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} = q \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (8)$$

Kehren wir zurück zu der Berechnung des Ertrags des Erbbauzins. Wir gehen davon aus, dass Kapitalmarktzins  $z_{\text{Kap}}$  und Inflationsrate  $z_{\text{Inf}}$  nicht identisch sind und setzen  $q = \frac{1+z_{\text{Inf}}}{1+z_{\text{Kap}}} \neq 1$ . Damit ist

$$E_{\text{Erb}} = W_1 \cdot (1 + z_{\text{Inf}})^{-1} \cdot z_{\text{Erb}} \cdot (1 + z_{\text{Kap}})^n \cdot \sum_{i=1}^n \left( \frac{1 + z_{\text{Inf}}}{1 + z_{\text{Kap}}} \right)^i \quad (9)$$

$$= W_1 \cdot (1 + z_{\text{Inf}})^{-1} \cdot z_{\text{Erb}} \cdot (1 + z_{\text{Kap}})^n \cdot \sum_{i=1}^n q^i \quad (10)$$

$$= W_1 \cdot (1 + z_{\text{Inf}})^{-1} \cdot z_{\text{Erb}} \cdot (1 + z_{\text{Kap}})^n \cdot q \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (11)$$

$$= W_1 \cdot (1 + z_{\text{Inf}})^{-1} \cdot z_{\text{Erb}} \cdot (1 + z_{\text{Kap}})^n \cdot \frac{1 + z_{\text{Inf}}}{1 + z_{\text{Kap}}} \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (12)$$

$$= W_1 \cdot z_{\text{Erb}} \cdot (1 + z_{\text{Kap}})^{n-1} \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}. \quad (13)$$

Nun, da wir zwei schöne Formeln für den erwarteten Ertrag bei Verkauf und für den Erbbauzins gefunden haben, beschäftigen wir uns noch mit dem Grundstück selbst: Die Gemeinde bleibt bei der Vergabe von Erbbaurechten im Besitz der Grundstücke (bei Verkauf nicht). Im Vergleich zum Verkauf erhöht sich nach dem Ablauf des Erbbauvertrages der Ertrag daher noch um den Wert des Grundstückes  $W_{n+1}$ .

Wir wollen nun zunächst einen Zusammenhang zwischen  $z_{\text{Inf}}$ ,  $z_{\text{Kap}}$  und  $z_{\text{Erb}}$  finden, der für

$$E_{\text{Kauf}} = E_{\text{Erb}} + W_{n+1} \quad (14)$$

sorgt. Dazu ersetzen wir  $E_{\text{Kauf}}$  und  $E_{\text{Erb}}$  durch die eben ermittelten Formeln (1) und (13) und nach (2) setzen wir  $W_{n+1} = W_1 \cdot (1 + z_{\text{Inf}})^n$ :

$$\Leftrightarrow W_1 \cdot (1 + z_{\text{Kap}})^n = W_1 \cdot z_{\text{Erb}} \cdot (1 + z_{\text{Kap}})^{n-1} \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad (15)$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} & + W_1 \cdot (1 + z_{\text{Inf}})^n && \left| \cdot \frac{1}{W_1 \cdot (1 + z_{\text{Kap}})^n} \right. \\ \Leftrightarrow & 1 = z_{\text{Erb}} \cdot \frac{1}{1 + z_{\text{Kap}}} \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} + \underbrace{\frac{(1 + z_{\text{Inf}})^n}{(1 + z_{\text{Kap}})^n}}_{=q^n} && \left| -q^n \right. \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Leftrightarrow 1 - q^n = z_{\text{Erb}} \cdot \frac{1}{1 + z_{\text{Kap}}} \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \left| \cdot \frac{1 - q}{1 - q^n} \right. \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow 1 - q = \frac{z_{\text{Erb}}}{1 + z_{\text{Kap}}} \quad (18)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \frac{1 + z_{\text{Inf}}}{1 + z_{\text{Kap}}} = \frac{z_{\text{Erb}}}{1 + z_{\text{Kap}}} \quad \left| \cdot (1 + z_{\text{Kap}}) \right. \quad (19)$$

$$\Leftrightarrow 1 + z_{\text{Kap}} - 1 - z_{\text{Inf}} = z_{\text{Erb}} \quad (20)$$

$$\Leftrightarrow z_{\text{Kap}} - z_{\text{Inf}} = z_{\text{Erb}}. \quad (21)$$

Die Rechnung ergibt, dass unter der Voraussetzung von konstanten Zinssätzen die erwarteten Erträge der Gemeinde bei der Vergabe von Erbbaurechten gerade dann genau so hoch sind wie beim Verkauf, wenn der Erbbauzinssatz der Differenz aus Kapitalmarktzins und Inflationsrate entspricht. Bei einem höheren Erbbauzins überwiegt selbstverständlich der Ertrag aus Erbbaurecht, bei einem niedrigeren Satz der Ertrag aus dem Verkauf.

Da die Voraussetzung der konstanten Zinssätze äußerst realitätsfern ist, werden wir unsere bisherigen Erkenntnisse nutzen um ein realistischeres Szenario zu betrachten: Anstatt von konstanten Zinssätzen auszugehen, werden wir Zinssätze betrachten, die über einen gewissen Zeitraum konstant sind<sup>2</sup>. Wir werden deshalb den betrachteten Zeitraum (unsere  $n$  Jahre) aufteilen in Zeitabschnitte, in denen sich weder Inflationsrate noch Kapitalmarktzins ändern, und die jeweiligen Zinssätze in Abschnitt  $i$  mit  $z_{\text{Kap},i}$ ,  $z_{\text{Inf},i}$  und  $z_{\text{Erb},i}$  bezeichnen, sowie mit  $E_{\text{Erb},i}$  bzw.  $E_{\text{Kauf},i}$  den Ertrag bis zum letzten Tag von Zeitabschnitt  $i$ , wenn wir uns für Erbbauvertrag bzw. Verkauf des Grundstückes entschieden hätten.

Analog zu dem Fall der konstanten Zinsen, liegt die Vermutung nahe, dass der Ertrag aus dem Verkauf dem Ertrag eines Erbbauvertrages entspricht, also

$$E_{\text{Kauf},i} = E_{\text{Erb},i} + W_{i+1}, \quad (22)$$

wenn in jedem Abschnitt der Erbbauzinssatz so gewählt wird, dass er der Differenz von Kapitalmarktzins und Inflationsrate entspricht, also

$$z_{\text{Erb},i} = z_{\text{Kap},i} - z_{\text{Inf},i} \quad \text{für alle } i. \quad (23)$$

Um diese Vermutung zu beweisen werden wir das Verfahren der „Vollständigen Induktion“ anwenden. Dazu werden wir zuerst zeigen, dass unsere Vermutung im ersten Zeitabschnitt gilt. Als zweites werden wir zeigen, dass, wenn unsere Vermutung in einem beliebigen Zeitabschnitt gilt, sie auch in dem darauf folgenden Abschnitt gilt. Gelingt uns beides, wissen wir, dass die Vermutung in Abschnitt 1 wahr ist und daher auch in dem darauf folgenden Abschnitt 2. Da sie dann in Abschnitt 2 wahr ist, ist sie auch in Abschnitt 3 wahr usw.

Der erste Teil ist trivial, da wir bereits gezeigt haben, dass die Erträge innerhalb eines Zeitraumes mit konstanten Zinsen genau dann gleich groß sind, wenn der Erbbauzinssatz der Differenz von Kapitalmarktzins und Inflationsrate entspricht (siehe (14) - (21)). Für den zweiten Teil benötigen wir zunächst drei Formeln, mit denen wir  $E_{\text{Kauf},i+1}$ ,  $E_{\text{Erb},i+1}$  und  $W_{i+2}$  aus  $E_{\text{Kauf},i}$ ,  $E_{\text{Erb},i}$  und  $W_{i+1}$  berechnen können.

---

<sup>2</sup>Inflationsraten werden „nur“ monatlich aktualisiert und die Zinsen für Geldanlagen sind meistens auf mehrere Jahre festgelegt.

Da wir für  $E_{\text{Kauf},i+1}$  und  $W_{i+2}$  nur den jeweiligen Zinssatz aufmultiplizieren müssen, ist offenbar

$$E_{\text{Kauf},i+1} = E_{\text{Kauf},i} \cdot (1 + z_{\text{Kap},i+1}) \quad (24)$$

$$W_{i+2} = W_{i+1} \cdot (1 + z_{\text{Inf},i+1}). \quad (25)$$

Den neuen Ertrag aus dem Erbbauvertrag erhalten wir, indem wir zunächst die Zinsen auf den bisherigen Ertrag kassieren und den Erbbauzins aus Abschnitt  $i + 1$  aufaddieren:

$$E_{\text{Erb},i+1} = E_{\text{Erb},i} \cdot (1 + z_{\text{Kap},i+1}) + W_{i+1} \cdot z_{\text{Erb},i+1}. \quad (26)$$

Mit (22) und (23) und den drei eben aufgestellten Gleichungen wollen wir nun zeigen, dass (22) auch gilt, wenn wir  $i$  durch  $i + 1$  (bzw.  $i + 1$  durch  $i + 2$ ) ersetzen:

$$E_{\text{Kauf},i+1} = E_{\text{Kauf},i} \cdot (1 + z_{\text{Kap},i+1}) \quad (27)$$

$$\stackrel{(22)}{=} (E_{\text{Erb},i} + W_{i+1}) \cdot (1 + z_{\text{Kap},i+1}) \quad (28)$$

$$= E_{\text{Erb},i} \cdot (1 + z_{\text{Kap},i+1}) + W_{i+1} \cdot (1 + z_{\text{Kap},i+1}) \quad (29)$$

$$= E_{\text{Erb},i} \cdot (1 + z_{\text{Kap},i+1}) + W_{i+1} \cdot (1 + \underbrace{z_{\text{Inf},i+1} - z_{\text{Inf},i+1}}_{=0} + z_{\text{Kap},i+1}) \quad (30)$$

$$= E_{\text{Erb},i} \cdot (1 + z_{\text{Kap},i+1}) + W_{i+1} \cdot (z_{\text{Kap},i+1} - z_{\text{Inf},i+1}) + \underbrace{W_{i+1} \cdot (1 + z_{\text{Inf},i+1})}_{=W_{i+2}} \quad (31)$$

$$\stackrel{(23)}{=} \underbrace{E_{\text{Erb},i} \cdot (1 + z_{\text{Kap},i+1}) + W_{i+1} \cdot z_{\text{Erb},i+1}}_{=E_{\text{Erb},i+1}} + W_{i+2} \quad (32)$$

$$= E_{\text{Erb},i+1} + W_{i+2}. \quad (33)$$

Damit ist die vollständige Induktion abgeschlossen und die Vermutung bewiesen.